ΣEMINARIO DI MATEMATICA

La matematica è per pochi?

ASTI, 13 aprile 2024 - ITIS "Artom"

Roberto IMPERIALE

LA MATEMATICA

ALL'INCROCIO DEI SAPERI

Una piccola narrazione errante e qualche artefatto mediatore

LA MATEMATICA È PER POCHI?

- *La domanda sembra retorica ma in realtà non lo è. Per un'ampia parte di nostri connazionali la risposta è "SI".*
- *Nonostante le trasformazioni del clima culturale e dei contesti educativi e didattici del nostro paese, i motivi che la determinano sono vari e riguardano non solo "il cosa sia la matematica in sé", e dunque la sua stessa natura di sapere dell'uomo, finalizzato o definalizzato che sia, ma l'ancora tra noi presente eredità gentiliano-crociana e – ultimi non ultimi – i conseguenti modi con cui la matematica stessa venga insegnata e imparata e gli effetti che quei modi generano, tra i quali "la paura", (Imperiale, 2013), il "non c'ho mai capito niente" e il conseguente disinteresse totale e definitivo per essa.*
- *Chi, invece, si occupa di "ricerca in e di didattica della matematica", avendo scelto d'avere a cuore le sorti "progressive" di chi, per qualsivoglia ragione, dimori in questo paese e della scuola che (secondo i dettami dell'art.34 della Costituzione) ne integri le identità, direbbe, ovviamente, di "NO".*
- *La mia storia personale mi colloca tra questi. Alcuni dei giganti sulle cui spalle sono seduto me ne dettero le ragioni. Ne leggiamo alcune, anche per giustificare il titolo delle chiacchierata.*

CENTRALITÀ DEL LINGUAGGIO – LA NARRAZIONE

- *"Il metodo che consiste nel proporre e riproporre una negoziazione sui significati con la mediazione dell'interpretazione* ***narrativa*** *costituisce a mio avviso uno dei grandi risultati dello sviluppo umano in senso ontogenetico, culturale e filogenetico" .* (Bruner, 1992)

- *"Le fiabe servono alla matematica come la matematica alle fiabe".* (Rodari, 1973)

UNITÀ DELLA CULTURA E DEI SAPERI

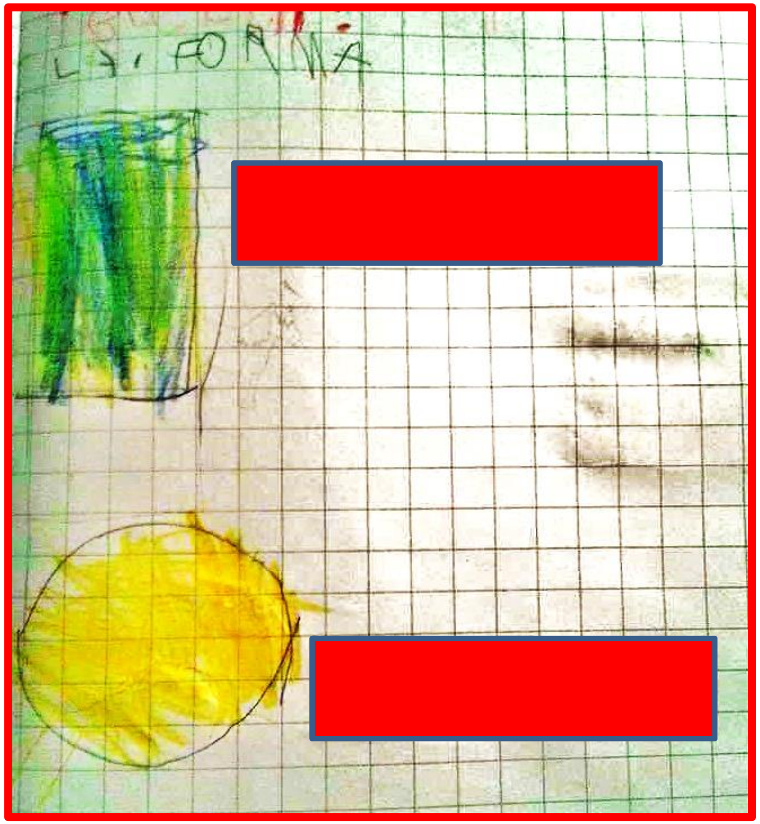
- *"Il punto di partenza è il problema dell'unità della cultura. […] In ogni insegnamento ci dovrà essere un approccio* ***storico-genetico*** *[…] che attraversa tutte le «discipline» e le collega l'una all'altra".* (L. Lombardo Radice, 1976)

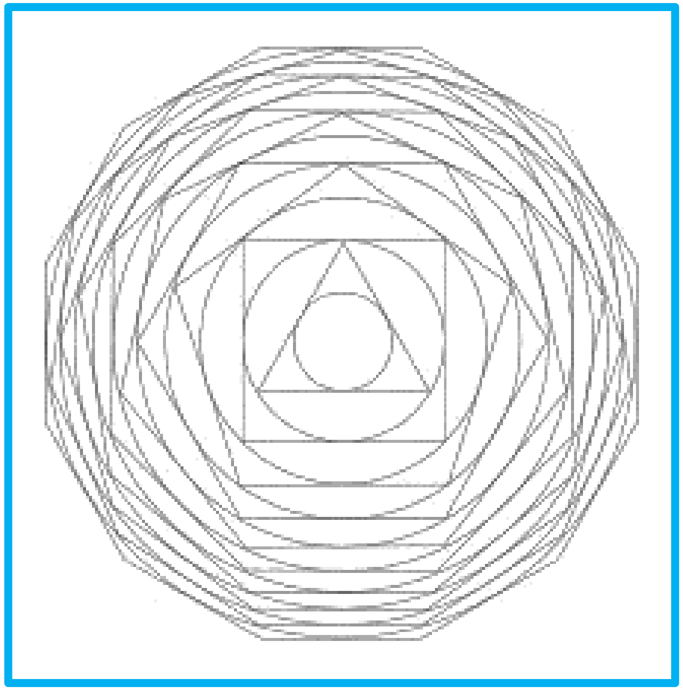
PORSI E RISOLVERE PROBLEMI "LEGITTIMI" (Von Foerster, 1987)

- *[E così, ragazzi] "vedrete che voi stessi sarete condotti a porvi delle questioni, a pensare degli altri problemi; e il pensare un problema, il porsi delle questioni e dei perché, è ancor più difficile che saperli risolvere, ed è più bello" .*
(Castelnuovo, 1979)

DARE SENSO.

TROVARE «LE PAROLE PER DIRLO» A TUTTI E A CIASCUNO





ARCHIMEDE (~ 287 a.C. – 212 a.C.)

UN PICCOLISSIMO INTRECCIO DI NARRAZIONI

Cos'è, dunque, la Matematica? Tra le tante definizioni, scelgo la seguente:

"E lo Cielo del Sole si può comparare a l'Arismetrica per due proprietadi: l'una si è che del suo lume tutte l'altre stelle s'informano; l'altra si è che l'occhio nol può mirare". *(Dante, Convivio, II, XIII, 15)*

Quando si parte il gioco della zara
Colui che perde si riman dolente
Repetendo le volte, e tristo impara

Purgatorio, VI, vv.1-3

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{nE}{n}$$

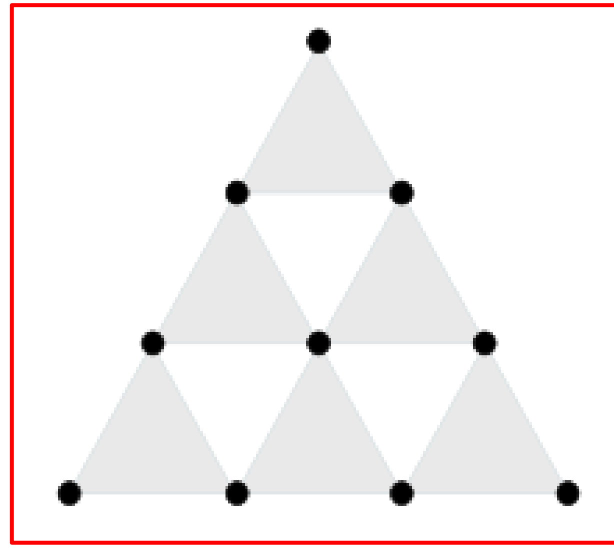
Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova
(Paradiso, XXXIII, vv. 133-138)
I tre cerchi della Trinità

Nei Śulvasūtras, libri della matematica vedica, (la Śulva è la «corda» che serviva per misurare), si parla in particolare dell'accrescimento degli Agna, gli altari di fuoco dei sacrifici, tra le diverse forme dei quali andava stabilita un'equivalenza di forma e misura, la ricerca della quale porta alla costruzione […] di un cerchio della stessa area di un quadrato» *(Zellini, 2016)*

Raffaello SANZIO (1483 – 1520)
LA SCUOLA DI ATENE - Particolare
Stanze della Signatura – Musei Vaticani

Uno dei giganti di cui si disse

PITAGORA (580/570 a.C. ; ~495 a.C.)



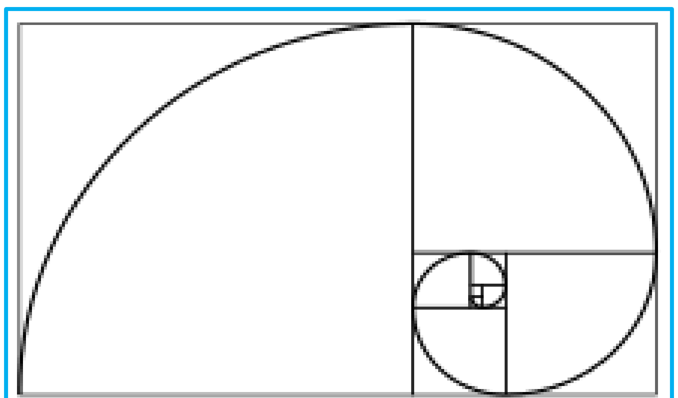
LA SACRA TETRAKTYS
«I NUMERI CHE REGGONO IL MONDO»

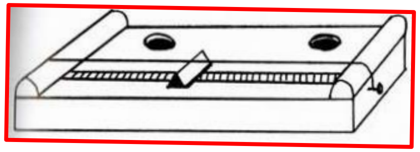
GLI INTERVALLI MUSICALI
1 : 1 UNISONO
2 : 1 OTTAVA (διὰ πασῶν χορδῶν)
3 : 2 QUINTA
4 : 3 QUARTA

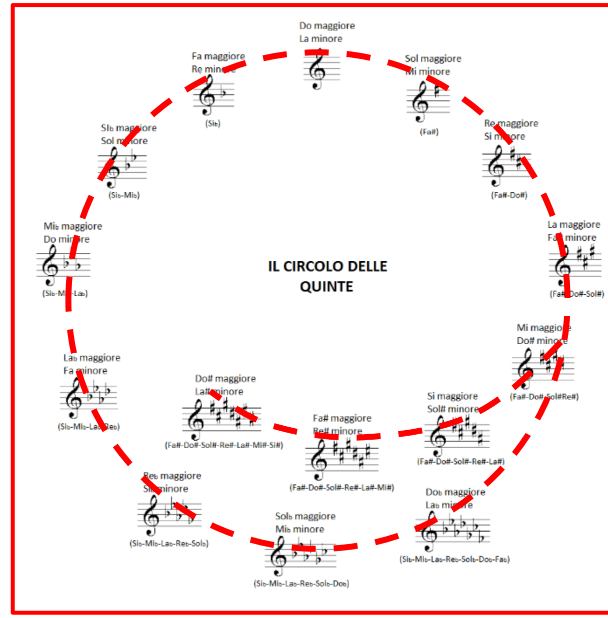
LA LEGGENDA DEL MUSICISTA
DALL'INCUDINE AI MIRABILI ARTEFATTI
(Giamblico, 1991)

IL CICLO DELLE QUINTE
ILCOMMA PITAGORICO
(100 cents = $\sqrt[12]{2}$)

Invece di un cerchio, si genera una spirale «logaritmica», che, avendo raggio di accrescimento pari a ***φ ≅ 1,618****…(il celebre numero d'oro o della «divina proporzione») è una «spirale aurea» o di Fibonacci e risulta inscritta in un rettangolo aureo.*

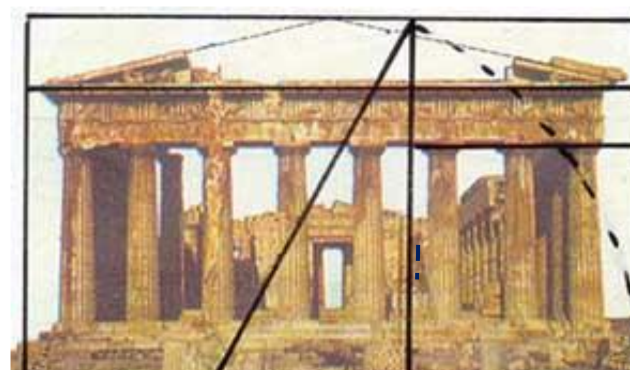






Giuseppe VERDI
(1813-1901)
IL TROVATORE

1

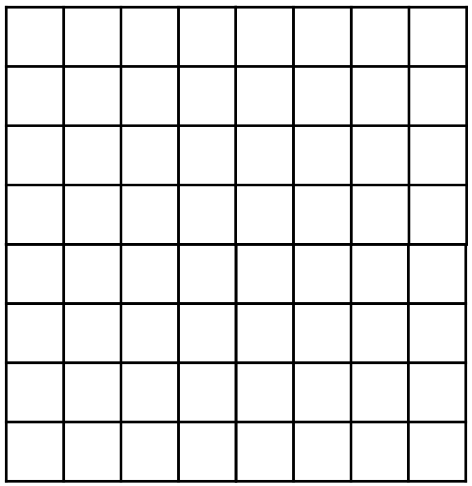


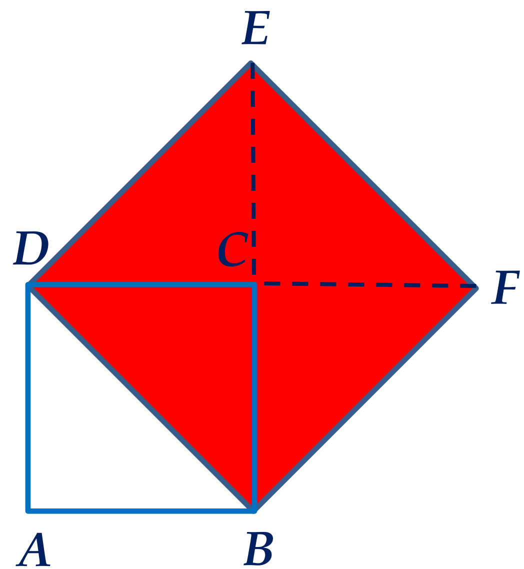
Fidia (~490 a.C. - ~430 a.C.) (φ)

Come si raddoppia l'area di un quadrato mantenendone la forma?

$l = a\,,\ A = a^2$; $l = 2a\,,\ A = 4a^2$

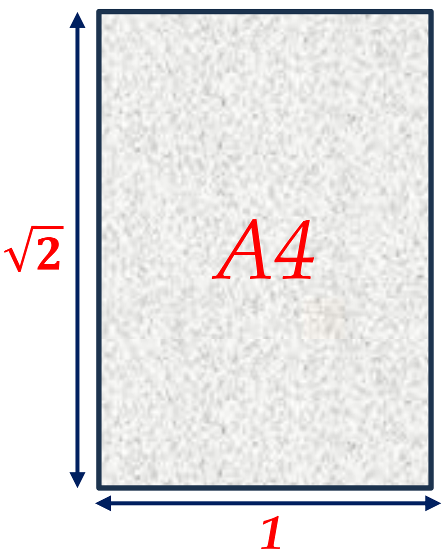
$a : x = x : 2a$ - $x^2 = 2a^2\ ;\ x = a\sqrt{2}$

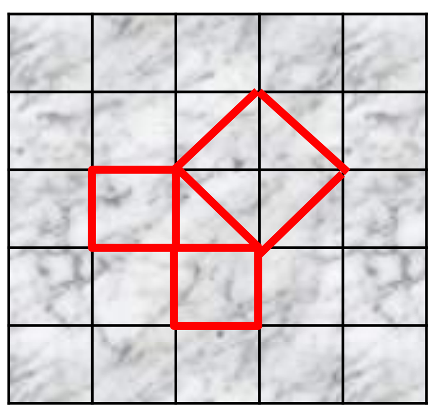


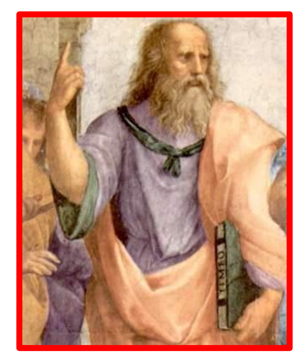


È dunque mestieri che la linea della quale ha a nascere lo spazio di otto piedi, sia maggiore di questa ch'è due piedi; e minore di quest'altra, ch'è quattro piedi.

(Menone, XVII)

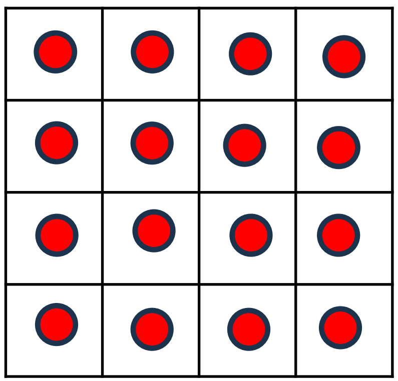






PLATONE (Πλάτων)
(428/427 a.C. - 348/347 a.C.)

È ovvio però pensare che il nuovo quadrato abbia la forma come in fig.1. Questo dice che il RADDOPPIAMENTO dell'area di un quadrato si può ottenere aggiungendo una cornice a squadra, o GNOMONE, che è ciò che «aggiunto a qualsiasi entità, numero o figura, rende il tutto simile all'entità a cui è stato aggiunto» (Erone di Alessandria - I° sec. d.C. (in: Zellini, 1999) e che ha la stessa area del quadrato originario (ad esempio = 16 m^2).



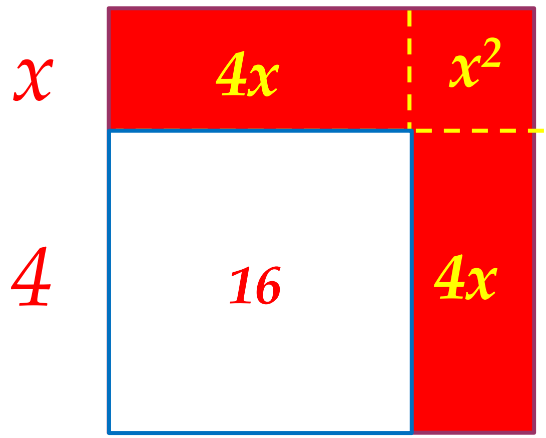


fig.1

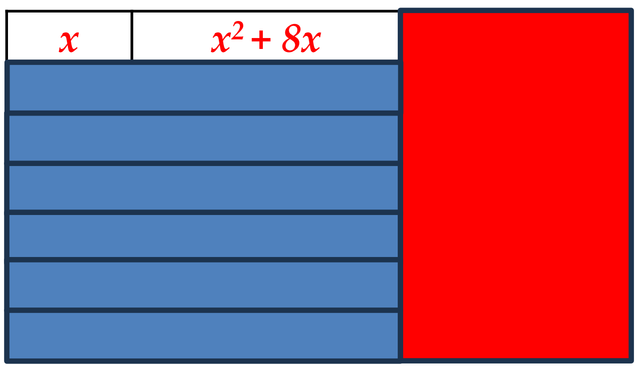
Quali ne saranno le dimensioni? Innanzitutto, sarà necessario calcolare la lunghezza del segmento «x». La soluzione non è per tutti semplice e immediata: bisogna risolvere l'equazione $\boldsymbol{x^2 + 8x = 16}$, *prima negoziando «qualche parola» («incognita, numero sconosciuto non qualsiasi», ecc…) ed usando il calcolo non come fine dell'intelligere ma come strumento di esso.*

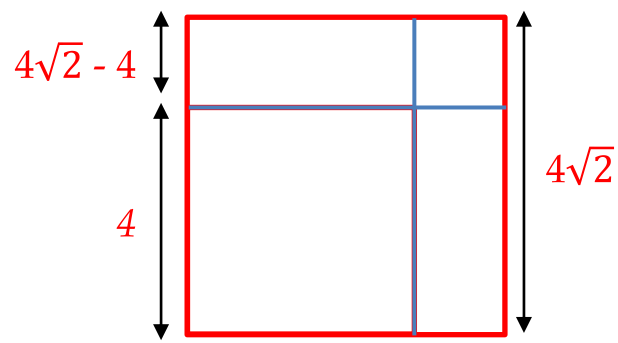
Com'è noto, la soluzione classica (positiva) è: $\boldsymbol{x = 4\sqrt{2} - 4}$

Dunque, o formule…o proviamo ad aggirare l'ostacolo, evitando l'inciampo che ci si pone davanti (il problema, dal gr. proballo). Se al «numero sconosciuto» che abbiamo indicato con x si attribuisse il valore $x = 2$, si otterrebbe: $2^2 + 8 \times 2 = 20$ che è «maggiore» di 16. Se $x = 0$, si otterrebbe: $0^2 + 8 \times 0 = 0$. Questo «vuol dire» che il «numero sconosciuto» deve essere maggiore di 0 e minore di 2. Se $x = 1$ il risultato è 9. Troppo poco. Proviamo col porre $x = 1,5$. Otteniamo: $1,5^2 + 8 \times 1,5 = 14,25$, che è buon valore ma migliorabile.

Usiamo un foglio di ***calcolo****…*

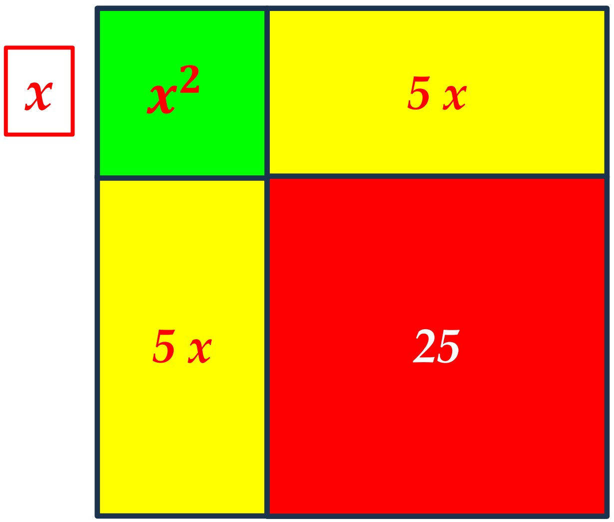
v. S. Dehaene, 2010)





In Kitāb al-jabr wa al-muqābala, il grande matematico e astronomo persiano AL-KHWĀRIZMĪ (780 d.C. - 850 d.C.) mostra un geniale procedimento per risolvere un'equazione di 2° grado, che, scritta in notazione moderna, è:

$$\boxed{x^2 + 10x = 39}$$



$$\boxed{x^2 + 10x = 39}$$

$$\boxed{x^2 + 10x + 25 = 39 + 25}$$

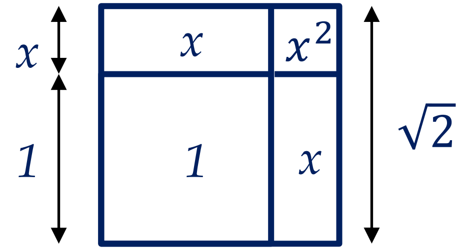
$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$$

Metodo del «completamento del quadrato»

NUMERI E FIGURE

$\sqrt{2} - 1$



$$x = \sqrt{2} - 1$$

$$x^2 + 2x = 1 \qquad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

"L'accrescimento dell'area di un quadrato mediante cornice era trattato dalla matematica vedica attraverso l'impiego del cd Quadrato del Binomio, «un'uguaglianza algebrica di importanza centrale per lo sviluppo dell'analisi moderna" mentre Euclide (IV sec. a.C.- III sec. a.C.) che «era platonico e aveva familiarità con questa filosofia» «dimostra di essa una versione puramente geometrica ".

(Zellini, 2016)

IL LABORATORIO

Il laboratorio non è (soltanto) un posto fisico, ma lo spazio-tempo DELL'UNIPLURALITÀ (*), dove ciascuno e tutti, situati in relazione affettivo/cognitiva, collaborino, (**) intrecciando il PENSARE, il FARE e il SAPERE SUL FARE e mettendo in campo processi di RICERCA, che, erranti, mai unici e quasi mai simili a se stessi, siano la massima espressione del desiderio di sapere per evolvere e producano il farsi e lo svilupparsi dell'intelligenza. Quella ricerca sarà quasi sempre generata dal dover RISOLVERE PROBLEMI.

- *Del resto risolvere problemi che, prendendo in prestito una celebre dichiarazione, definiremo "LEGITTIMI" ossia "quelli dei quali non si conosca a priori la soluzione"* (Von Foerster 1987)
- *si può considerare "l'attività più caratteristica del genere umano"* (Polya, 1993)
- *perché "suppone uno slancio di curiosità, una mobilitazione affettiva dell'intelligenza"* (Glaeser, 1975)

(*) L'UNIPLURALITÀ è l'insegnare a ciascuno e a tutti l'imparare di ciascuno e tutti nello stesso spazio-tempo

(**)"L'imparare umano presuppone una natura sociale specifica [...] La competenza prima è sociale e poi diventa competenza individuale"

(Vygotskji, 1976)

IL PROBLEMA…! COSA SARÀ MAI…?

Il PROBLEMA (gr. «pro-bállo», «che si pone davanti») (Cortelazzo; Zolli, 1983) è un «OSTACOLO» «UN VACUUM,, incontrato lungo l'incerta via della ricerca errante, il vuoto che si desidera superare o colmare».

Ma, come dice il poeta, avvertendo il viandante che 'no hay camino, se hace camino al andar' (Non c'è strada, la strada si fa camminando, Machado, 1995), questa via non esiste a priori, ma bisognerà costruirla passo dopo passo quando si voglia fare ricerca genuina, ovvero «IL NON SAPERE A PRIORI DOVE ANDARE».

Quest'equivalenza semantico/fattuale tra il «problema» (che può assumere anche le caratteristiche del gioco) e il «desiderio», anch'esso un vacuum da colmare, dice «dell'esistenza di un sistema dinamico del significato nel quale si uniscono l'affettivo e l'intellettuale» (Vygotskji, 1976)

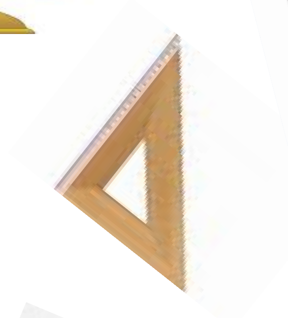
Prima di proseguire, serve però ricordare che

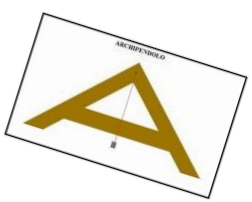
"Non c'è mai un unico modo «giusto» di affrontare un problema; [perciò)] è interessante seguire i diversi percorsi che menti diverse hanno intrapreso per giungere alle soluzioni". (Bellos, 2011)

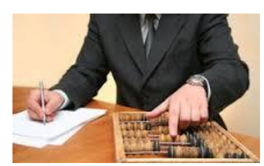
LA SOLUZIONE UNIPLURALE DEI PROBLEMI

1. *La messa in campo della motivazione*
2. *Il principio di parità – Il «repertorio delle idee»*
3. *Il corretto uso del tempo - la lentezza*
4. *Il superamento della «fissità cognitiva». Il «dubbio»*
5. *La creatività*
6. ***LA MEDIAZIONE DEGLI ARTEFATTI***
7. *«Il pensarci su…» - la metacognizione*

bla..bla..







GLI ARTE-FATTI, attraverso il legame SEMIOTICO col «pensiero» e con il «sapere», servono ad «analizzare, comprendere e modificare la realtà e/o il pensiero dell'uomo che ne è autore o l'utilizzatore». Attraverso la loro realizzazione e manipolazione, dunque, SI IMPARA.

In particolare, gli ARTEFATTI COGNITIVI sono "strumenti di pensiero che completano le capacità della mente rafforzandone i poteri" (Norman, 1995)

Esempio di relazione/passaggio

dall'artefatto «MATERIALE» all'artefatto «SOCIO/COGNITIVO/CULTURALE»

calculi → numeri → parole → scrittura

«pensiero ⟷ linguaggio»

M A T E M A T I C A

DOPPIA NATURA DEGLI ARTEFATTI

Aspetto della PRASSI o dell'ESPERIENZA

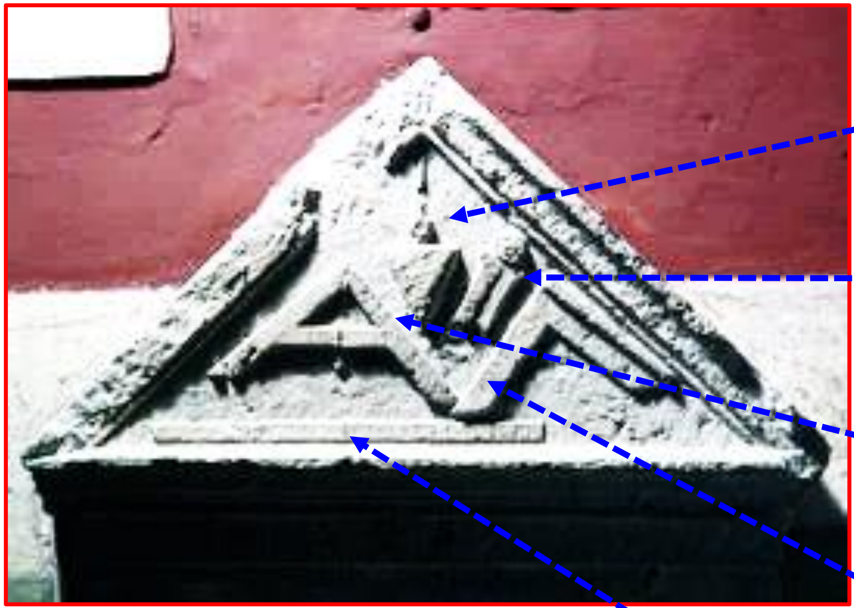
ORIENTAMENTO INTERNO ➡ ESTERNO

Modifica della realtà esterna

Aspetto della RIFLESSIVITÀ

ORIENTAMENTO ESTERNO ➡ INTERNO

Sviluppo dell'intelligenza – Interiorizzazione



Perpendiculum
(Filo a piombo)

Circinus
(Compasso)

Libella
(Archipendolo)

Norma o Regula
(Squadra)

Pes
(Piede romano)

Musei Capitolini – Roma
Nel timpano della stele funeraria
di M. Aebutius Macedo (I° secolo d.C.)
Magister o *Structor aedificiorum*
si vedono alcuni
ARTEFATTI

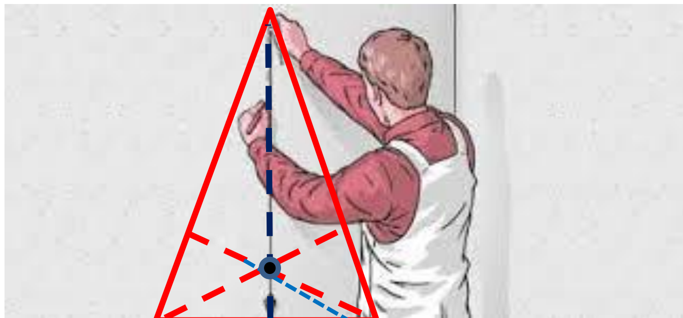
Di quale di questi artefatti potremo servirci per "cominciare a rendere accessibile" la definizione di ALTEZZA DI UN TRIANGOLO… ?

L'ALTEZZA È IL SEGMENTO

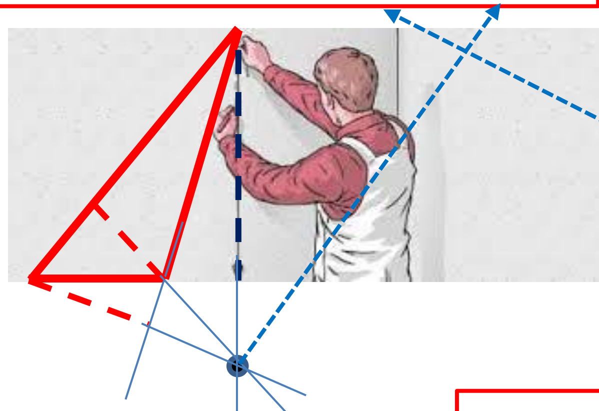
DI PERPENDICOLARE

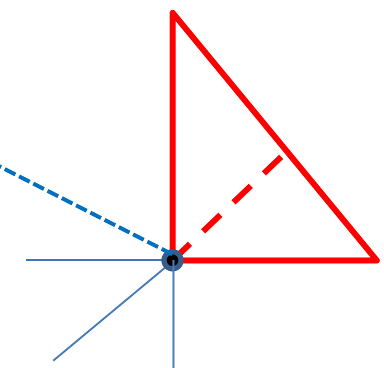
CHE VA DA UN VERTICE

AL LATO OPPOSTO



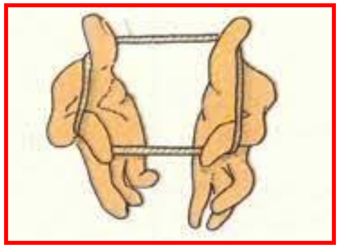
ORTOCENTRO
greco: ὀρθός, giusto





Perpendiculum
(Filo a piombo)

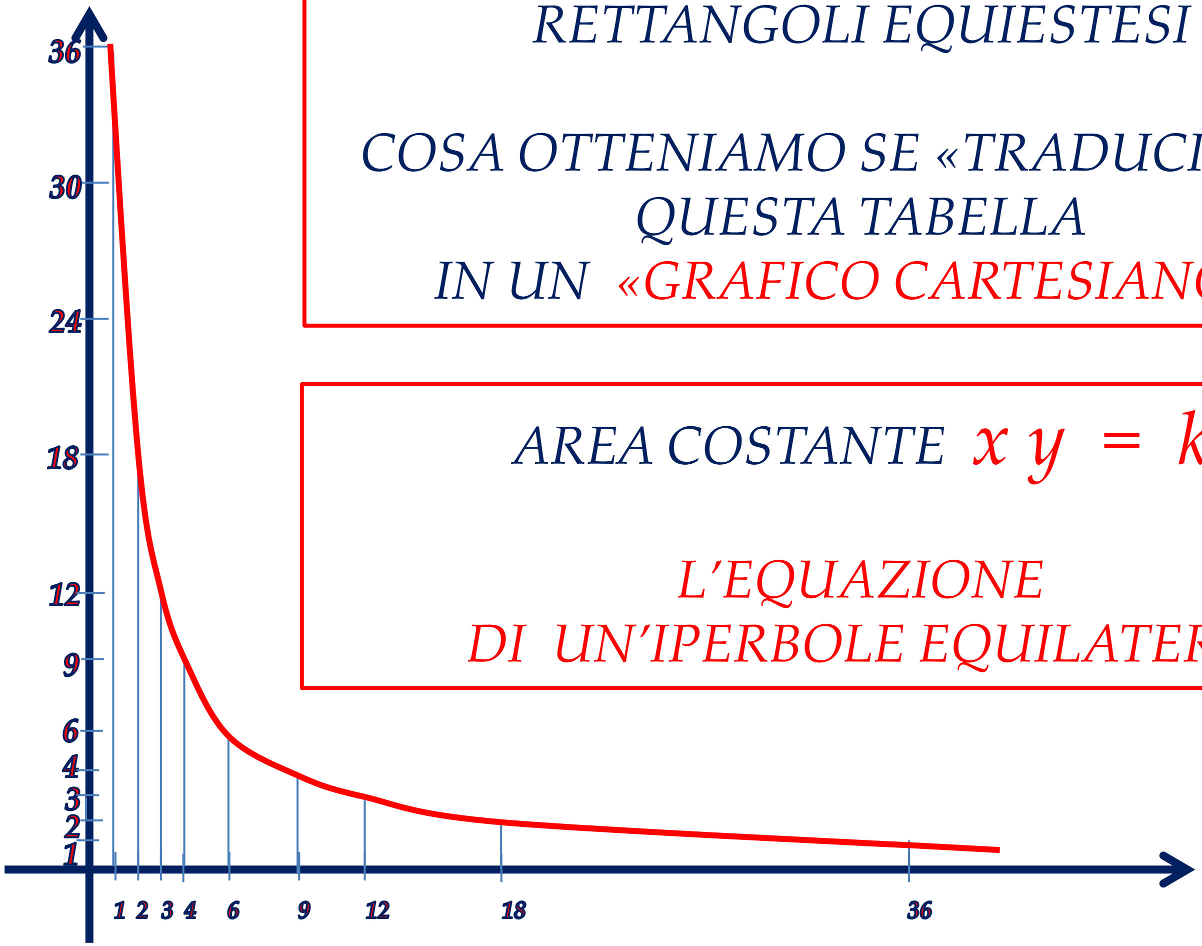
LO SPAGO … DI EMMA CASTELNUOVO



1. *Scrivete le dimensioni intere di tutti i rettangoli che abbiano area uguale a 36 cm^2. Poi, dite se ne esiste uno che abbia il perimetro minore di quello di ogni altro; e se sì, qual è.*
2. *Scrivete le dimensioni intere di tutti i rettangoli che abbiano perimetro uguale a 16 cm. Poi, dite se ne esiste uno che abbia l'area maggiore di quella di ogni altro; e se sì, qual è.*

(1,36) (2,18) (3,12) (4,9) (6,6)
HA PERIMETRO MINORE IL «QUADRATO» (6,6)
(1,7) (2,6) (3,5) (4,4)
HA AREA MAGGIORE IL «QUADRATO» (4,4)

b	h
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2
36	1



RETTANGOLI EQUIESTESI

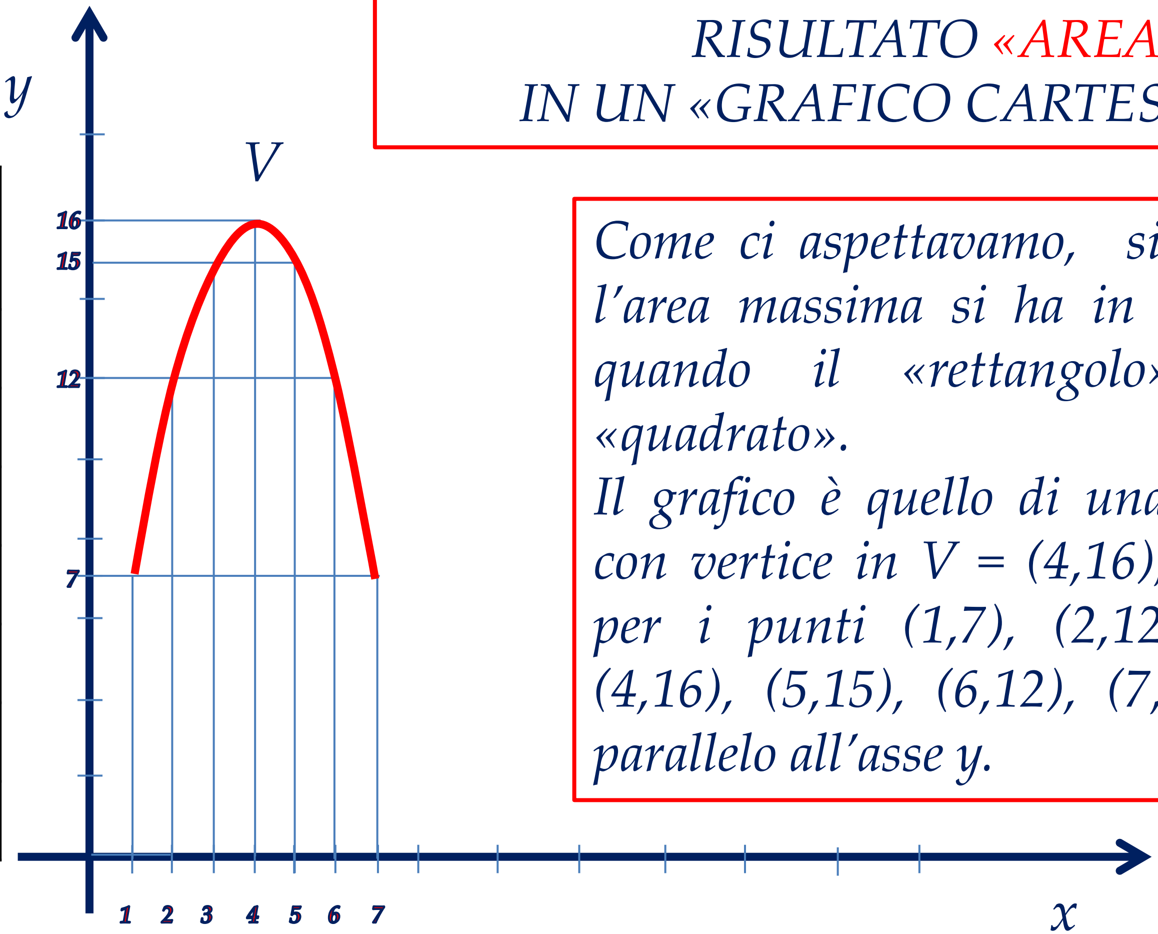
COSA OTTENIAMO SE «TRADUCIAMO» QUESTA TABELLA IN UN «GRAFICO CARTESIANO»?

AREA COSTANTE $x\,y = k$

L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE EQUILATERA

RETTANGOLI ISOPERIMETRICI
COSA OTTENIAMO SE «TRADUCIAMO» IL RISULTATO «AREA» IN UN «GRAFICO CARTESIANO»?

b	*h*	*Area*
1	7	7
2	6	12
3	5	15
4	4	16
5	3	15
6	2	12
7	1	7



Come ci aspettavamo, si vede che l'area massima si ha in (4,4) cioè quando il «rettangolo» è un «quadrato».
Il grafico è quello di una parabola con vertice in V = (4,16), passante per i punti (1,7), (2,12), (3,15), (4,16), (5,15), (6,12), (7,1) e asse parallelo all'asse y.

PICCOLO PROBLEMA …COLLEGATO

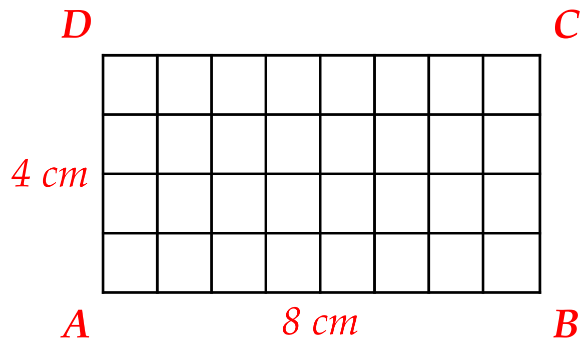


fig.1

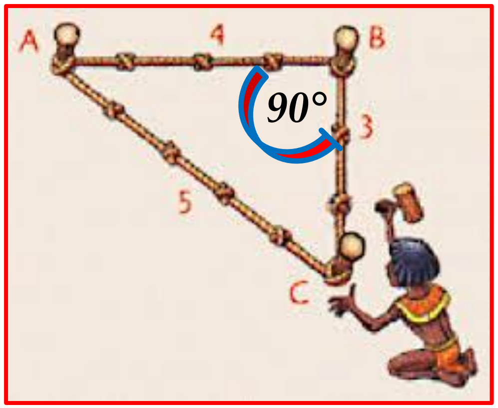
Dite se sia possibile

1. «Disegnare» con riga e compasso il RETTANGOLO che abbia DIMENSIONI INTERE, LA STESSA AREA DEL RETTANGOLO ABCD (fig. 1) e PERIMETRO MINORE, giustificando la risposta.

2. «Disegnare» con riga e compasso il RETTANGOLO che abbia LA STESSA AREA DEL RETTANGOLO ABCD (fig. 1) e PERIMETRO MINORE, giustificando la risposta.

Con la vostra cordicella

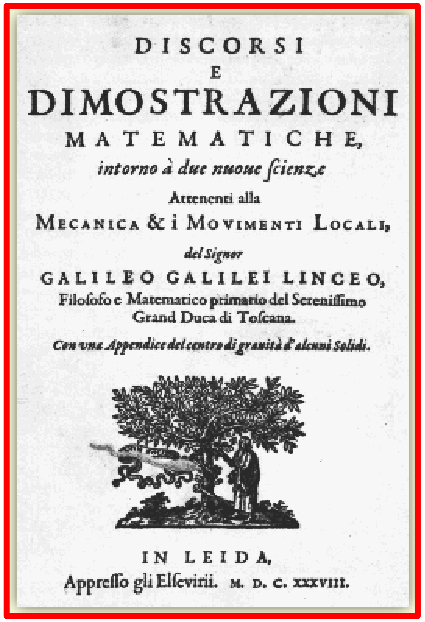
mettete a punto una procedura («artefatta»), per «verificare» (trascurando l'errore materiale…) che l'angolo che un muro forma col pavimento o che due muri formano tra loro sia quello «giusto»



LE TERNE PITAGORICHE

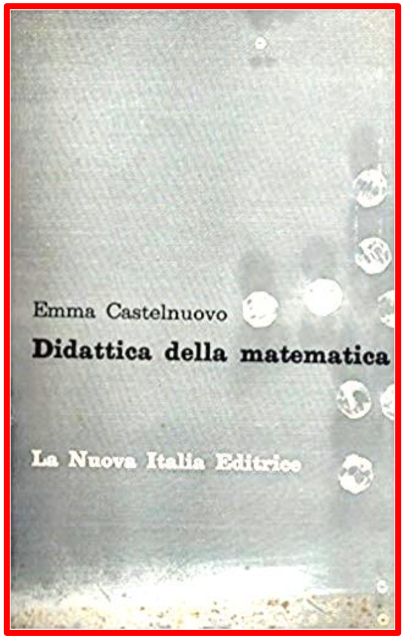
Gli Egiziani che sapevano «tendere le corde» erano detti «arpenodapti». Questo «sapere» consentiva loro di «riscrivere i confini» per similitudine; ma anche di alzare muri che stavano in piedi, grazie all'angolo «RETTO», cioè «ADATTO ALLA COSTRUZIONE, GIUSTO» (da: ius, «diritto»).

IL VOLUME

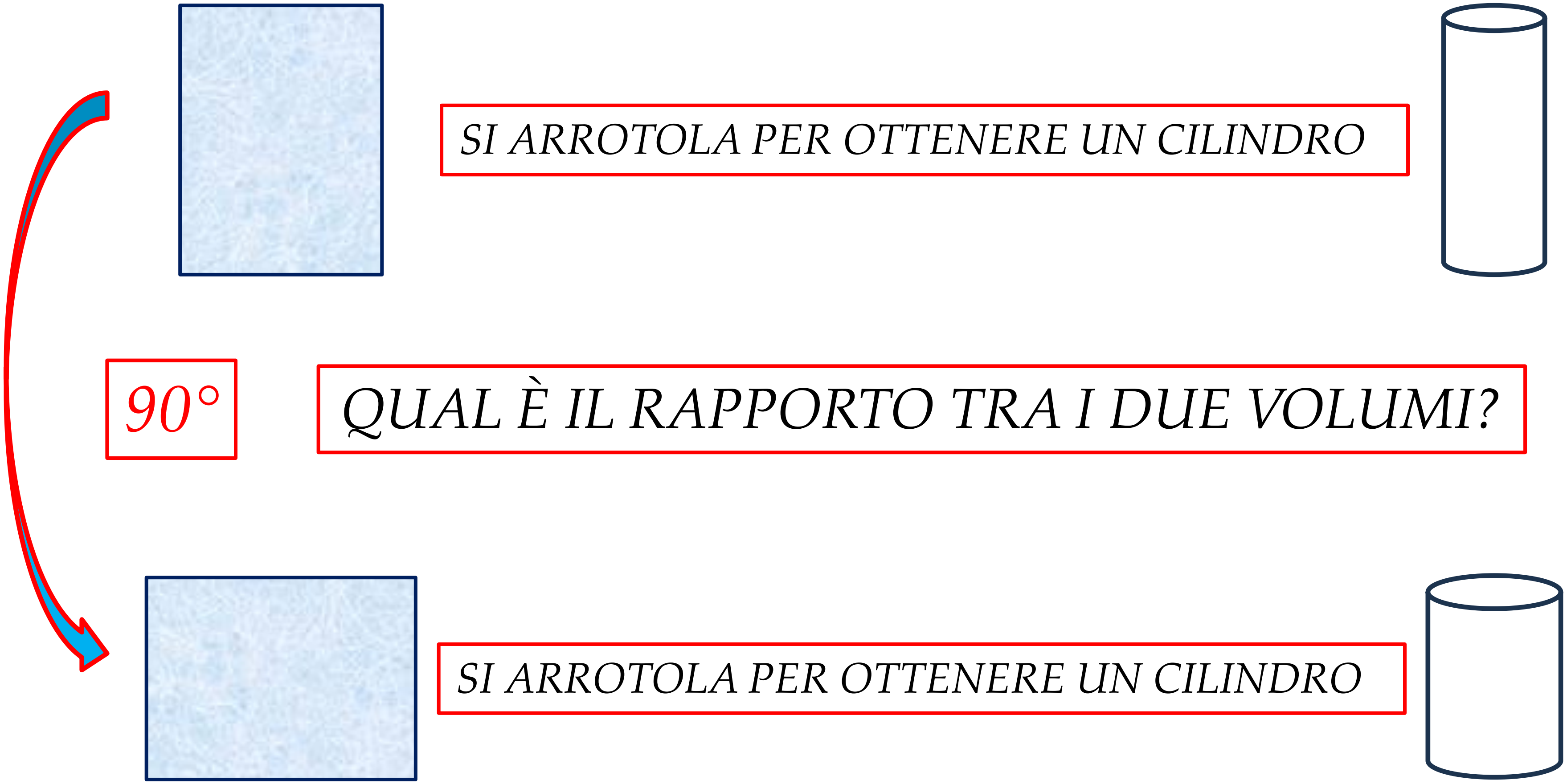


PADRONI E CONTADINI

Galileo GALILEI (1564-1642) in un volume del 1638 edito in Olanda, interessato a dimostrare una certa proprietà dei cilindri, raccontò che i padroni, per «pagare» i contadini del lavoro dei campi, davano loro un pezzo di iuta, di forma rettangolare, col quale cucire un sacco cilindrico che, poi, sarebbe stato riempito di granaglie. Nel 1963, Emma Castelnuovo «ci» ripropose il problema; e i ragazzi con cui ne discutemmo, ci fornirono «adeguate soluzioni» anticipate mediante artefatti.



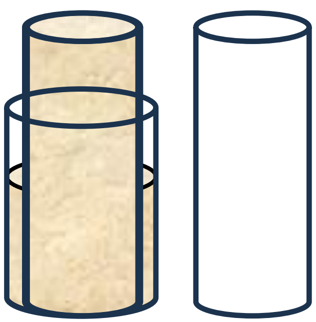
IL PROBLEMA DI GALILEI (1638)-CASTELNUOVO (1963) …IN LABORATORIO

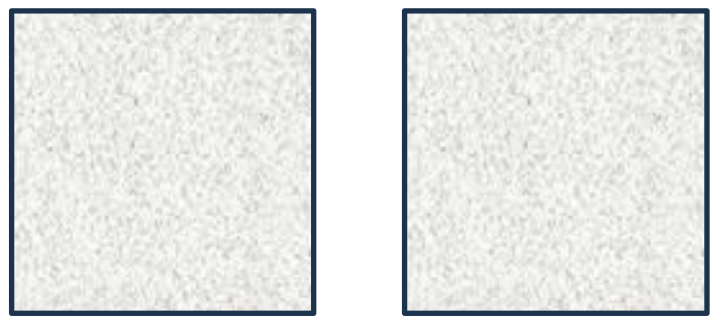


CON MIRABILE ARTEFATTO

L'artefatto anticipa la dimostrazione di GALILEI
«I cilindri retti, le superfici de i quali, trattone le basi, siano uguali, hanno fra di loro la medesima proporzione che le loro altezze contrariamente prese»
(Galilei, cit.)

Quand'è che i due volumi saranno «uguali»?





Se i due «fogli» sono quadrati uguali
e quindi i cilindri RETTI

IL MITO E IL λόγος - LA NARRAZIONE
I PROBLEMI IRRISOLVIBILI CON RIGA E COMPASSO.
LA DUPLICAZIONE DEL CUBO

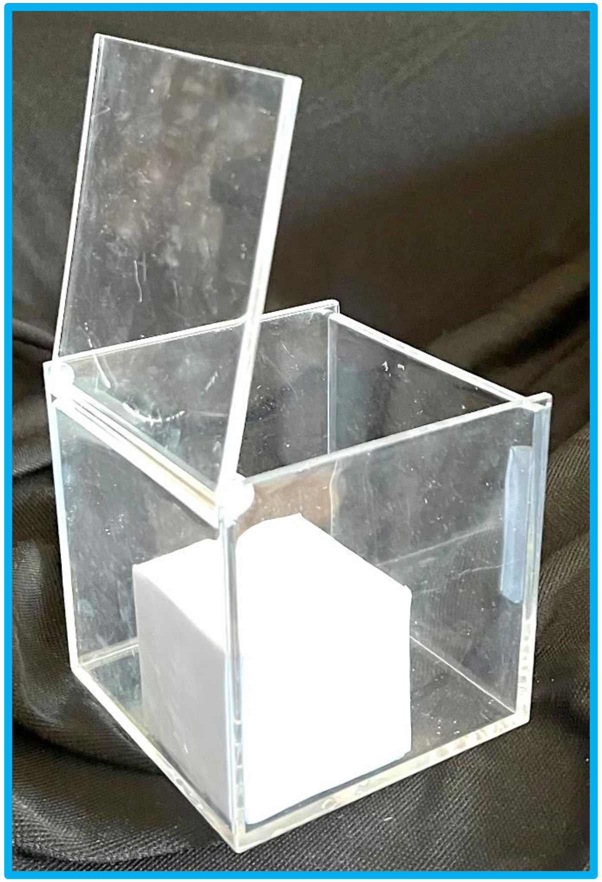
ERATOSTENE (~ 267 a.C. – ~ 194 a.C.) a TOLOMEO III° (280 a.C. - 222 a.C.)
SALUTE

''Narrano che uno degli antichi poeti tragici facesse apparire sulla scena MINOSSE nell'atto di far costruire una tomba a GLAUCO e che il re di Creta, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato 100 piedi dicesse: "Piccolo spazio invero accordasi a un sepolcro di un re: raddoppialo conservando sempre la forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro».

E questo problema fu chiamato DUPLICAZIONE DEL CUBO.

Si narra poi che a causa di una pestilenza, gli abitanti di Delo, spinti dall'oracolo di Apollo a duplicare il volume di un altare cubico, caddero nello stesso imbarazzo. Come stiamo per vedere, del problema si interessarono molti «matematici», spinti dal dubbio di cui sopra.

Un «artefatto» può dare inizio al processo del «comprendere»?



$s = a\ , V = a^3\ ;$

$s = 2a\ ,\ V = 8a$

Ma siccome la matematica dispone in sé della BELLEZZA «DEFINALIZZATA», analizziamo

IL METODO DI RIDUZIONE DI UN PROBLEMA A UN ALTRO

Grazie a EUDOSSO di Cnido (408 a.C.– 355 a.C.) considerato il sistematore della teoria dell'αναλογια, («analogia», «proporzione» in italiano), il matematico pitagorico IPPOCRATE di Chio (460 a.C. – 380 a.C.), aveva «ridotto» il problema del cubo all'individuazione di due medi proporzionali x e y tra a e 2a, cioè alla soluzione della proporzione:

$$\boxed{a : x = x : y = y : 2a}$$

e da qui al «modernissimo» impiego delle CONICHE.
Perché aveva «pensato» così? Perché, un solo medio proporzionale tra a e 2a avrebbe generato la proporzione $a : x = x : 2a$ mediante la quale – come abbiamo visto - «si risolve» il problema di costruire un quadrato di area doppia rispetto ad uno dato. *(Platone, Menone). La $\sqrt{2}$. Foglio A4*

Da qui, dividiamo la proporzione in due parti

$$\boxed{a : x = \boxed{x : y}} = y : 2a$$

Dalla prima si ottiene: (1) $x^2 = ay$ *da cui :* $y = \frac{x^2}{a}$, *una PARABOLA*

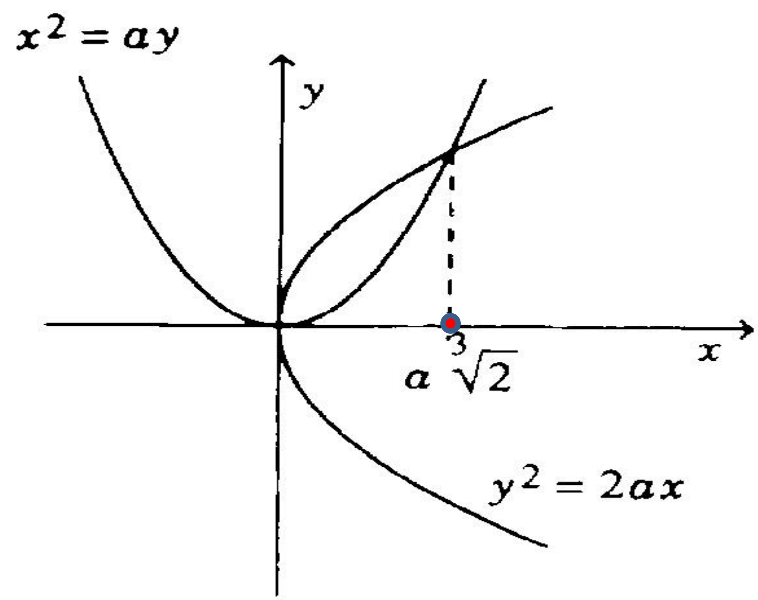
E dalla seconda si ottiene: (2) $y^2 = 2ax$, *una PARABOLA*

Elevando al quadrato la (1) $y = \frac{x^2}{a}$, *otteniamo:* $y^2 = \frac{x^4}{a^2}$

e uguagliandola alla (2) , *si ha:* $2ax = \frac{x^4}{a^2}$, *da cui si ricava:* $2a^3 = x^3$

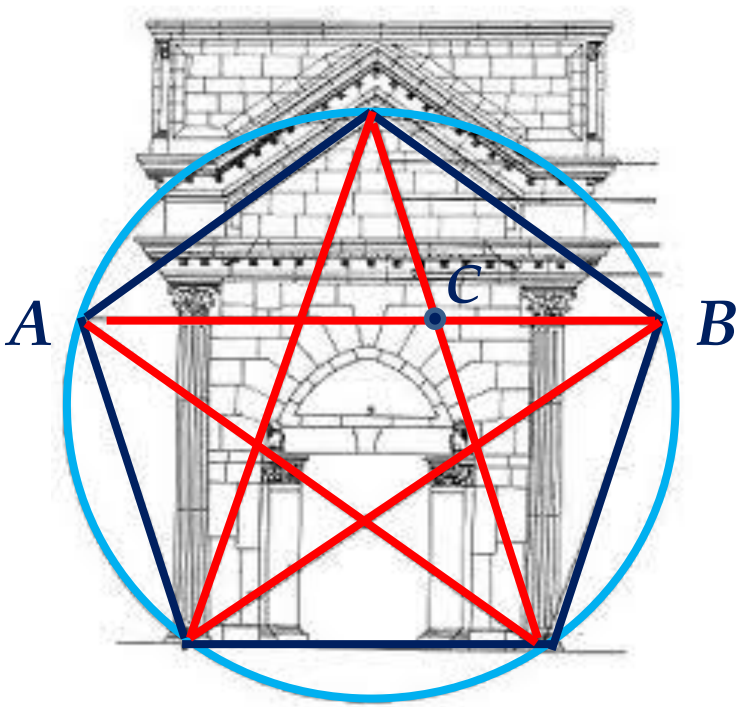
e quindi: $x = a\sqrt[3]{2}$

che è proprio il valore dello spigolo del cubo cercato



Il punto di intersezione delle due PARABOLE dà, in ASCISSA, IL VALORE DELLO SPIGOLO DEL CUBO cercato.

Omaggio a un gigante: FIBONACCI (LEONARDO DA PISA (~1170 - ~1250))
Studiò e conobbe l'«immensa» sapienza (non solo) matematica degli arabi, in particolare del persiano AL-KHWĀRIZMĪ (~ 780 d.C. - ~850 d.C:), il cui nome dette luogo all'italiano «ALGORITMO». L'imperatore FEDERICO II° di SVEVIA HOHENSTAUFEN (1194-1250), lo Stupor Mundi, chiese a Fibonacci, di cui era amico, di progettare – insieme con altri (es. Frate Elia da Cortona) - Castel del Monte.



Accade una cosa del genere:

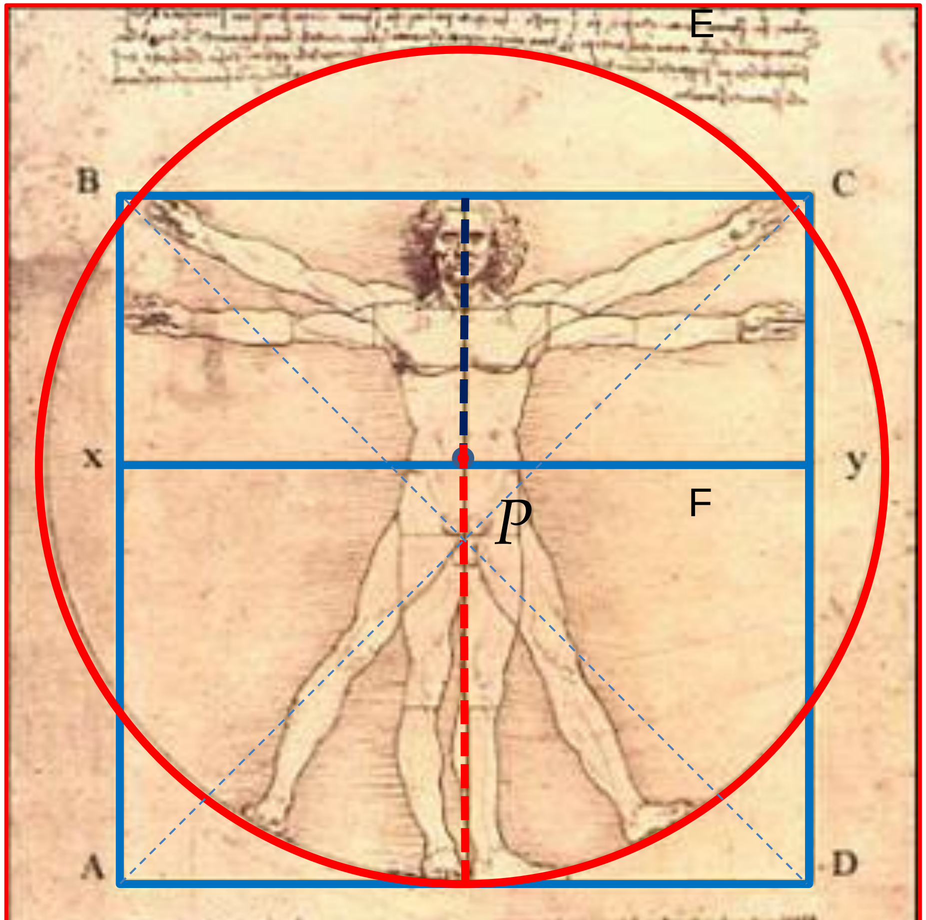
$$AB : AC = AC : CB$$

$$CB = 1 \; ; \; AC = x$$

$$(x+1) : x = x : 1 \quad ; \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\mathbf{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618\ldots}$$

Nell'HOMO ADULTO vitruviano le cui proporzioni sono perfette o «DIVINE», il punto P, che coincide con l'ombelico, ne divide l'altezza secondo la «DIVINA PROPORZIONE»



LEONARDO da Vinci
(1452-1519)

HOMO DI VITRUVIO
(~ 80 a.C. – ~15 a.C)